BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2010

НОВЫЙ ПОДХОД К ГРАНИЧНЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОШИ-РИМАНА

Н.А.АЛИЕВ, А.Х.АББАСОВА

Бакинский Государственный Университет

aygun_abbasova@bk.ru

Как известно, число граничных условий для обыкновенного линейного дифференциального уравнения совпадает с наивысшим порядком производной неизвестной функции, а для уравнений с частными производными число граничных условий должно совпадать с половиной порядка рассматриваемого уравнения. В связи с этим, большой интерес представляет постановка граничных задач даже для уравнения Коши-Римана, являющегося уравнением эллиптического типа первого порядка.

Введение

Классический курс уравнений математической физики изучает, в основном, граничные задачи для уравнения эллиптического типа [1], [2], где число граничных условий равно половине порядка рассматриваемого уравнения: для уравнения Лапласа, рассматривается задача Дирихле, Неймана или Пуанкаре, а для бигармонического уравнения (уравнения четвертого порядка) задаются два граничных условия. Эти граничные условия локальные. Математической моделью ядерного реактора (как показано в [2]) является граничная задача для интегро-дифференциального уравнения первого порядка в трехмерном пространстве, условие для которой задается на половине границы, т.е. не вся граница является носителем граничного условия. Такие задачи, как отметил Бицадзе на семинаре Института Математики им. Стеклова, не хорошо поставлены, так как при деформации границ, которые не являются носителями условия, постановка задачи не меняется. Поэтому мы вынуждены рассматривать нелокальные граничные условия, для которых вся граница является носителем условия и каждое условие также как и для обыкновенного дифференциального уравнения, соответствует одному дифференцированию.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение Коши-Римана

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}+i\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}=0,\ \ x=(x_1,x_2)\in R^2, \qquad (1)$$

определённое на вещественной плоскости, с граничными условиями на бесконечности, где $u(x)$, вообще говоря, комплекснозначная функция. Если рассматривать граничные задачи на полуплоскости, то граничные условия задаются как на бесконечности, так и на границе полуплоскости. Для уравнения Коши-Римана неприемлемо задавать произвольные граничные условия , в том числе условие Дирихле. Заданное граничное условие должно удовлетворять необходимым условиям. Если необходимые условия выполняются тождественно, то можно задавать граничные условия всюду на границе. Легко видеть, что функция

$$u(x) = \Phi(x_2 + ix_1), \tag{2}$$

или

$$u(x) = \Psi(x_1 - ix_2), \tag{3}$$

являются общими решениями уравнения (1), где $\Phi(\xi)$ или $\Psi(\xi)$ – произвольные функции. Если при решении граничных задач пользоваться представлением (2) или (3), то для определения произвольных функций приходим к функциональному уравнению, которое не легко поддаётся исследованию. В связи с этим в представленной работе используется фундаментальное решение по направлению, что не приводит к подобным трудностям.

Фундаментальное решение

Как было отмечено в [2], фундаментальное решение уравнения Коши-Римана имеет вид:

$$U(x-\xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)} \ . \tag{4}$$

Отметим, что при исследовании граничных задач для уравнения Коши-Римана с помощью фундаментального решения (4) приходим к сингулярным интегральным уравнениям, которые регуляризируются специальным образом [3], [4].

Определение 1. Фундаментальным решением некоторого уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение даёт дельта-функцию Дирака [2].

Определение 2. Функция, только производная по x_2 которой содержит дельта -функцию Дирака называют фундаментальным решением по направлению x_2 уравнения (1) .

Если пользоваться фундаментальным решением по направлению x_2 :

$$U(x-\xi) = e(x_2 - \xi_2)\delta(x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)), \tag{5}$$

то нужно исследовать свойства дельта- функции Дирака с комплексным аргументом.

Функция Дирака. Дельта-функция Дирака ведет себя подобно дифференцированию и поэтому раскрывает интеграл.

Определение 3. Регулярной называется функция, значения которой в каждой точке являются среднеарифметическими левых и правых предельных значений.

Замечание 1. Если функция не обладает разрывом второго рода (т.е. в точке разрыва она ограничена), то ее можно считать регулярной (в связи с изменением значений в точке разрыва).

Замечание 2. Если точка является точкой разрыва второго рода, то она не всегда поддается регуляризации.

Отметим следующие свойства функции Дирака:

1) $$\int_a^b \delta(x-\xi)f(\xi)d\xi = \begin{cases} f(x), если \ \ x \in (a,b), \\ \frac{1}{2}f(a), \ если \ \ \ x = a, \\ \frac{1}{2}f(b), \ если \ \ \ x = b, \\ 0, \ если, \ \ \ x \notin [a,b], \end{cases} \tag{6}$$

здесь a, b, x и ξ – вещественные и предполагается, что $f(x) = 0$ при $x \notin [a,b]$;

2) $$\int_a^b \delta(x_1 - \xi_1 + it)f(x_1)dx_1 = \begin{cases} f(\xi_1 - it), \ если \ \ \xi_1 \in (a,b), \\ \frac{1}{2}f(a-it), \ если \ \xi_1 = a, \\ \frac{1}{2}f(b-it), если \ \xi_1 = b, \\ 0, \ если \ \ \xi_1 \notin [a,b]. \end{cases} \tag{7}$$

Замечание 3. В формуле (6) дельта-функция раскрывает интеграл и дает нам известную (заданную) функцию $f(x)$, определенную на $[a,b]$. В отличие от (6), в (7) мы получаем аналитическое продолжение на комплексную плоскость функции $f(x)$, определённой при $x \in (a,b) \subset R$. В, частности, если $t = 0$, то (7) превращается в (6):

$$\int_a^b \delta(t + i(x_2 - \xi_2))f(x_2)dx_2 = \begin{cases} -if(\xi_2 + it), \ \xi_2 \in (c,d), \\ -\frac{i}{2}f(c+it),.\xi_2 = c, \\ -\frac{i}{2}f(d+it), \xi_2 = d, \\ 0, \qquad\qquad \xi_2 \notin [c,d]. \end{cases} \tag{8}$$

Это означает, что при раскрытии интеграла приходится создавать аргумент дельта-функции Дирака под дифференциалом рассматриваемого интеграла.

Задача на прямоугольнике. Рассмотрим уравнение Коши-Римана (1) на прямоугольнике вида: $D = \{x = (x_1, x_2); x_1 \in (-R, R), x_2 \in (0, R)\}$, где R - фиксированное вещественное число.

Основные соотношения. Для получения основного соотношения, как в [3], [4], умножив обе части уравнения (1) на фундаментальное решение (5) и интегрируя по области D, получим:

$$\int_{-R}^{R} dx_1 \int_0^R \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} U(x-\xi)dx_2 + i\int_0^R dx_2 \int_{-R}^{R} \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} U(x-\xi)dx_1 = 0.$$

Раскрывая внутренние интегралы и учитывая фундаментальное решение (5) имеем:

$$\int_{-R}^{R}[u(x_1,R)e(R-\xi_2)\delta(x_1-\xi_1-i(R-\xi_2))-u(x_1,0)e(-\xi_2)\delta(x_1-\xi_1+i\xi_2)]dx_1+$$

$$+i\int_0^R[u(R,x_2)e(x_2-\xi_2)\delta(R-\xi_1-i(x_2-\xi_2))-u(-R,x_2)e(x_2-\xi_2)\delta(-R-\xi_1-i(x_2-\xi_2))]dx_2=$$

$$=\begin{cases} u(\xi), & \xi_1\in(-R,R),\xi_2\in(0,R),\\ \frac{1}{2}u(\xi), & \xi_1\in[-R,R],\xi_2=0,\xi_2=R;\xi_2\in[0,R],\xi_1=-R,\xi_1=R.\end{cases} \tag{9}$$

Таким образом, установлено утверждение:

Теорема 1. Каждое решение уравнения Коши-Римана (1), определенное в области D, удовлетворяет соотношениям (9).

Второе выражение основного соотношения (9) является необходимым условием.

Необходимое условие

Как было отмечено выше, если пользоваться фундаментальным решением (4), то в необходимых условиях появляются сингулярные интегралы.

Учитывая (7) и (8), необходимое условие, полученное из основного соотношения, примет следующий вид:

$$\begin{cases} u(\xi_1,0)=u(\xi_1+iR,R)-\frac{1}{2}u(R,i\xi_1-iR)+\frac{1}{2}u(-R,i\xi_1+iR),\\ u(\xi_1,R)=u(\xi_1-iR,0)+\frac{1}{2}u(R,R+i\xi_1-iR)-\frac{1}{2}u(-R,R+i\xi_1+iR),\\ u(-R,\xi_2)=\frac{1}{2}u(-R+iR-i\xi_2,R)+\frac{1}{2}u(-R-i\xi_2,0),\\ u(R,\xi_2)=\frac{1}{2}u(R+iR-i\xi_2,R)+\frac{1}{2}u(R-i\xi_2,0).\end{cases} \tag{10}$$

Теорема 2. Каждое решение уравнения Коши-Римана (1), определенное в области D, имеет вид:

$$u(\xi)=\frac{1}{2}u(\xi_1+iR-i\xi_2,R)+\frac{1}{2}u(\xi_1-i\xi_2,0). \tag{11}$$

Действительно, очевидно, что (11) получается из основного соотношения (9). Учитывая необходимые условия (10), из (11) получаем:

$$u(\xi)=u(\xi_1-i\xi_2,0)\ . \tag{12}$$

Как видно из (12), при условии

$$u(x_1,0)=\varphi(x_1) \tag{13}$$

решение задачи (1), (13) имеет вид:

$$u(x)=\varphi(x_1-ix_2), \tag{14}$$

а необходимые условия обращаются в тождества.

В дальнейшем с помощью фундаментального решения (5) по x_2 будем исследовать обратные задачи для уравнения Коши-Римана, как в смысле Тихонова-Лаврентьева, так и в смысле Стефана. Новой граничной задачей для уравнения Коши-Римана (1) будет задача с псевдо-граничными условиями, которые будут заданы в виде линейных соотношений, составленных из значений неизвестной функции, участвующих в необходимых условиях (10). Например, это могут быть значения неизвестной функции на границе $x_2 = 0 : u(\xi_1, 0), u(\xi_1 - iR, 0), u(-R - i\xi_2, 0), u(R - i\xi_2, 0)$. Легко привести аналогичные выражения и для другой границы рассматриваемой области.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981, 448 с.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971,512 с.
3. Aliyev N., Jahanshari M. Sufficient conditions for reduction of the BVP including a mixed PDE with non-local boundary conditions to Fredholm integral equations// Int. J.Math Educ.Sci.Technol. 1997, v. 28, №3, p.419-425.
4. Алиев Н., Аббасова А.Х. Об одной граничной задаче // Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 85-ci ildönümünə həsr olunmuş ”Riyaziyyat, informatika və iqtisadiyyatın müasir problemləri” mövzusunda Respublika elmi konfransının materialları, Bakı, 2008, s.18-21.
5. Tahanchahi M., Aliyev N. Determinant of analytical functions of its analytic domain by Cauchy-Riemann equation with special kind of boundary conditions // Southeast Asian bulleten mathematics, 2004, 28, №1, p.33-39.
6. Mekhtiyev Magomed F., Aliyev Nihan A., Fatemi Mehran A. On Fredholm property of a boundary value problem for a first order equation with general boundary conditions // Transactions Issue Mathematics and Mechanics of Physical technical and mathematical science, 2009, №4, p. 50-58.

KOŞİ-RİMAN TƏNLİYİ ÜÇÜN QOYULMUŞ SƏRHƏD MƏSƏLƏLƏRİNƏ YENİ YANAŞMA

N.Ə.ƏLİYEV, A.X.ABBASOVA

XÜLASƏ

Məlumdur ki, adi diferensial xətti tənliklər üçün verilmiş sərhəd şərtlərinin sayı tənliyin tərtibinə bərabərdir. Xüsusi törəməli tənliklərə gəldikdə isə burada sərhəd şərtlərinin sayı tənliyin tərtibinin yarısına bərabər olmalıdır. Bununla bağlı Koşi-Riman tənliyi (bir tərtibli elliptik tip tənlik) üçün qoyulmuş sərhəd məsələləri böyük maraq doğurur. İşdə Koşi-Riman tənliyi üçün qoyulmuş sərhəd məsələsi tədqiq olunur.

A NEW APROACH TO THE BOUNDARY PROBLEMS FOR CAUCHY-RIEMANN EQUATION

N.A.ALIYEV, A.Kh.ABBASOVA

SUMMARY

As it is known, the number of boundary conditions for the ordinary linear differential equation coincides with the highest order of the derivative of the unknown function, and for the partial differential equations the number of boundary conditions should coincide with the half order of the considered equation. The statement of boundary problems for Cauchy-Riemann equation of the elliptic type of the first order is of great interest in this respect.